2° esperienza: Verifica delle leggi di conservazione negli urti

Lo scopo della seconda esperienza è di verificare le leggi di conservazione negli urti (quantità di moto, impulso), in un urto completamente anelastico (i carrelli si attaccano con il velcro), ed in un urto elastico (i carrelli si respingono con i magneti).

Setup (Video 1)

• Disporre il binario orizzontale. Non è necessario lo sia perfettamente, le forze non impulsive come la forza peso non influenzano l'urto, ma è comodo lo sia.

• Ad un estremo della guida è posto il misuratore di distanza/velocità (sonar), da impostare con un campionamento di 50Hz.

• All'altro estremo è montato un misuratore di forza (dinamometro) con una molla, da impostare con un campionamento di 500Hz. Il misuratore di forze va azzerato con l'apposito pulsante quando scarico ed in posizione.

• Le masse dei carrelli e i pesi aggiuntivi devono essere misurati usando la bilancia digitale disponibile in cattedra.

Come prima cosa **determinare la costante elastica k della molla** connessa al misuratore di forza: appoggiare il carrello alla molla, e a mano comprimere e rilasciare più volte (senza arrivare al fondo corsa della molla). Il sonar misurerà la posizione, e impostando un grafico forza vs posizione si otterrà una retta ($F = k \cdot \Delta x$). La pendenza della retta, stimata con un'interpolazione lineare misura la costante elastica k (e il suo errore).

Urti completamente anelastici (Video 2)

Porre uno dei carrelli fermo in centro al binario (bersaglio), l'altro vicino al sonar (proiettile), orientati in modo che si attacchino all'urto. Dare una piccola spinta al proiettile. Il sonar misurerà la velocità prima e dopo l'urto, permettendo di misurarne le velocità e quindi, date le masse, le quantità di moto.

La Fig. 1 mostra un tipico grafico ottenuto dal sistema di misura che rappresenta la velocità durante un urto completamente anelastico. In questo urto un carrello vuoto (senza masse aggiuntive) urta contro un altro carrello anch'esso vuoto e inizialmente fermo e dopo l'urto i due proseguono uniti insieme. La prima parte del segnale mostra la velocita del carrello in movimento; si vede poi un brusco calo della velocità (urto) e poi la velocità (ridotta) con la quale i due carrelli uniti proseguono dopo l'urto.

Negli urti anelastici vale solo il principio di conservazione della quantità di moto. Per un urto completamente anelastico in cui una delle masse è inizialmente ferma:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \tag{1}$$

dove m1 e v1 sono la massa e la velocità prima dell' urto della massa in moto, m2 la massa ferma e v la velocità comune dopo l'urto. E' conveniente scrivere la (1) come

$$\frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2) v} = 1 \tag{2}$$

Per verificare la conservazione della quantità di moto si può quindi **verificare quanto il valore sperimentale del primo membro si discosta da 1, tenendo conto degli errori di misura**. Nella eq. (2) si devono utilizzare i valori delle velocità immediatamente prima e dopo l'urto. Sia prima che dopo l'urto

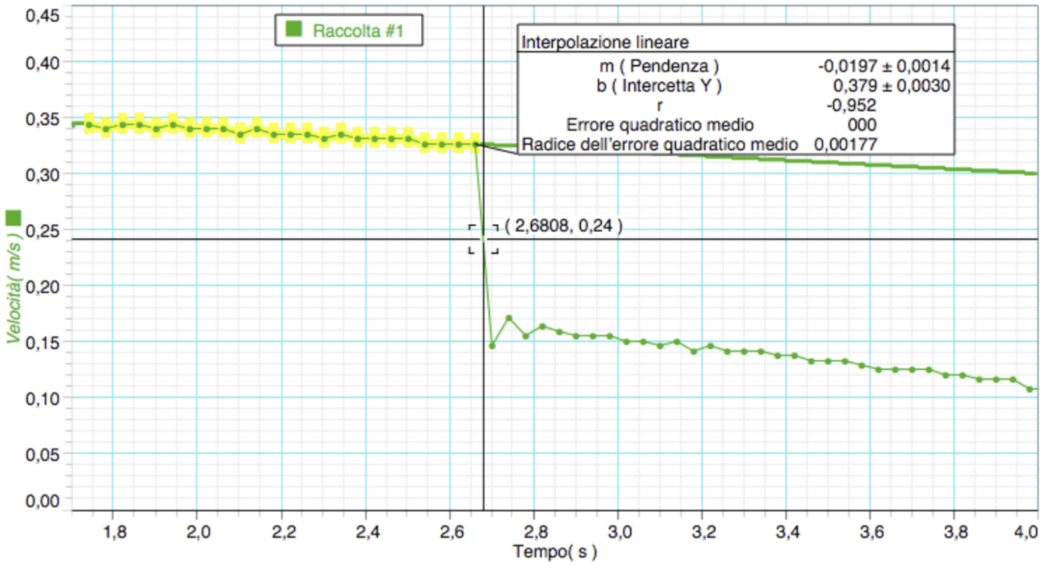

Fig. 1 - Esempio di misura della velocità dei carrelli con un unico sensore nell'urto completamente anelastico.

il moto avviene in presenza di attrito dinamico e quindi si tratta di un moto uniformemente decelerato. Per questo motivo i segnali delle velocità sono rette con una leggera pendenza negativa. Per determinare il valore v1 da utilizzare nella (2) si esegue l'interpolazione lineare prima dell'urto, individuando l'equazione della retta y=q+mx che rappresenta la velocità:

$$v(t) = v_0 + at \tag{3}$$

dove v0 è l'intercetta e a la pendenza. Successivamente si determina dal grafico, aiutandosi con lo strumento "puntatore", l'istante dell'urto t0, individuando l'istante centrale dell'intervallo temporale in cui avviene il brusco cambio di velocità (vedi esempio nella Fig. 1). A questo punto si calcola la velocità subito prima dell'urto:

$$v_1 = v(t_0) = v_0 + at_0 \tag{4}$$

Con lo stesso procedimento si determina la velocità v dopo l'urto, utilizzando l'equazione della retta che si ottiene dall'interpolazione lineare del secondo tratto, quello subito dopo l'urto:

$$v = v'(t_0) = v_0{}' + a't_0 \tag{5}$$

L' errore sulla quantità a primo membro della (2) si determina dalle formule di propagazione. Posto

$$r = \frac{m_1 v_1}{(m_1+m_2)v} \tag{6}$$

ricavare

$$\Delta r = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial m_1}\right)^2 \Delta m_1{}^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial m_2}\right)^2 \Delta m_2{}^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v_1}\right)^2 \Delta v_1{}^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 \Delta v^2} \tag{7}$$

Nell'eq. 7 le quantità Δm1 e Δm2 sono gli errori sulle masse dei carrelli dovuti alla bilancia (1 g). Gli errori Δv1 e Δv si determinano dall'interpolazione. Infatti dall'eq. 4 risulta che il valore v1 e' funzione delle tre quantità, v0, a e t0, tutte e tre in linea di principio affette da errore. Tuttavia se la pendenza della retta è piccola e l'istante dell'urto è individuato con buona precisione, il contributo del termine at_0 si può trascurare e assumere come errore su v1 solo quello dovuto a v0 cioè all'errore sull'intercetta determinato dall'interpolazione lineare. Stesso discorso vale per l'errore Δv.

Una verifica indipendente della conservazione della quantità di moto, si ottiene dall'impulso misurato dal dinamometro, quando il secondo carrello è respinto dalla molla a fine guida (teorema dell'impulso):

$$|\Delta p| = 2p = \int F dt \tag{8}$$

Un esempio di un risultato, e dei pannelli su cui operare è in Figura 2:

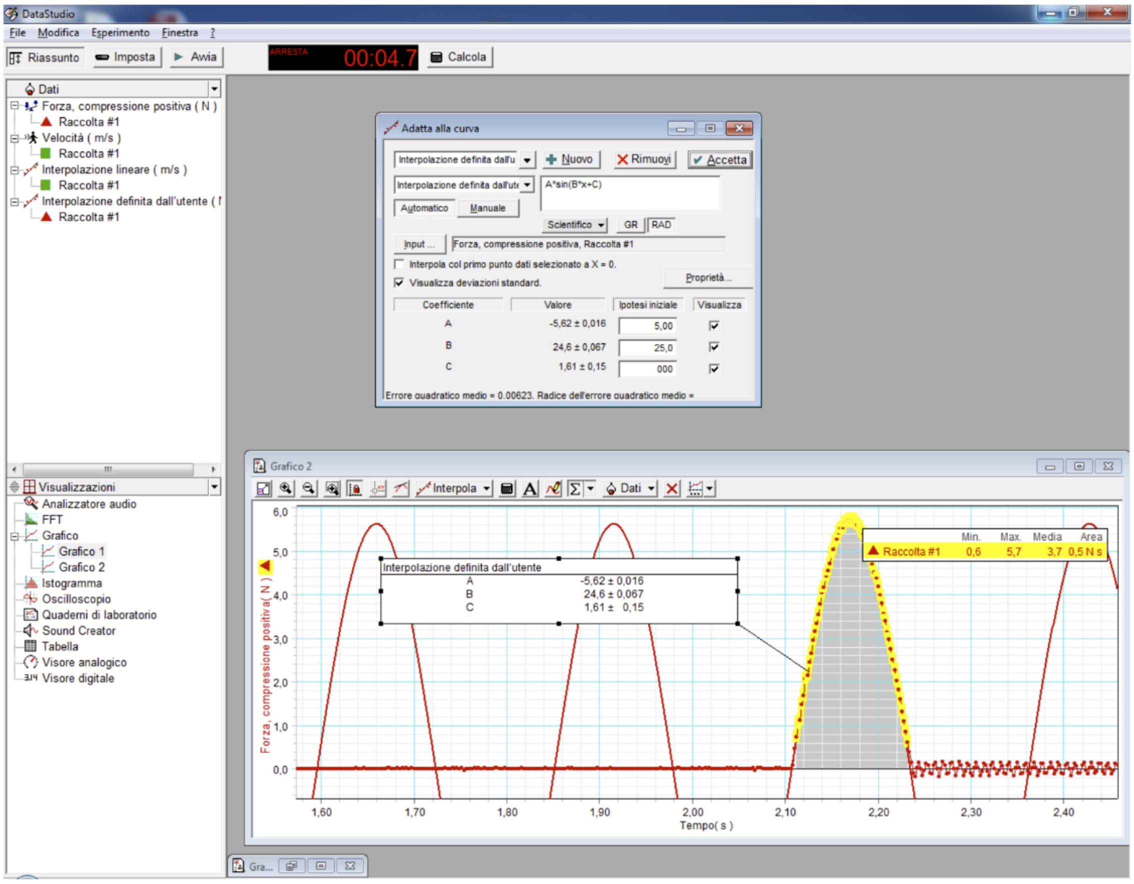

Fig. 2: l'urto con il dinamometro e la relativa interpolazione

Su grafico forza vs tempo si osserva l'urto contro la molla del dinamometro, che risulta una mezza sinusoide. Un prima stima dell'impulso si ottiene con la funzione "misura area" del programma (attivabile dal pulsante "Σ"). Una stima più accurata si ottiene con il fit della curva.

• selezionare i punti della sinusoide, senza arrivare alla parte orizzontale.

• Selezionare "interpolazione definita dall'utente" nel menu interpolazioni.

• Selezionando poi il pop-up con i risultati, si può inserire la formula "A*sin(Bx+C)". Perché il fit converga è spesso necessario fornire dei valori iniziali ragionevoli almeno per l'ampiezza "A" e la pulsazione "B", leggibili facilmente dal grafico ($B = \omega = 2\pi/T$)

Una volta determinati ampiezza e pulsazione e i loro errori dal fit, si può usarli per determinare il valore dell'integrale e quindi della quantità di moto dei due carrelli dopo l'urto:

$$\int_0^{T/2} \text{Asin}(Bt + C)dt = \frac{2A}{B} = 2p \tag{9}$$

ovvero la quantità di moto dopo l'urto $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}$ che può essere confrontata, entro gli errori, con la stima precedente di $p = (m_1 + m_2)v$. In realtà otterrò un valore un po' più piccolo, perchè nel percorso tra l'urto anelastico e quello con il dinamometro, la quantità di moto si riduce a causa dell'attrito. **Per minimizzare l'effetto dell'attrito, posizionare il secondo carrello vicino alla molla così da ridurre il tragitto carelli – molla dopo l'urto. In alternativa è possibile determinare con precisione la quantità di moto persa a causa dell'attrito dal grafico delle velocità in funzione del tempo:** $\Delta p = F_{att}\Delta t = (m_1 + m_2)a\Delta t$ dove l'accelerazione a (decelerazione in questo caso) è ottenuta dall'interpolazione lineare del grafico $v(t)$ dopo l'urto e Δt è il tempo tra l'urto e il contatto con il dinamometro. Noto Δp (preso in valore assoluto), si ricava:

$$p_{corretto} = p + \Delta p \tag{10}$$

dove $p = A/B$ viene ricavato dai valori di A e B come descritto sopra.

Attenzione:

- **Verificare la conservazione della quantità di moto con almeno 3 diverse coppie di masse per i carrelli, ripetendo l'operazione almeno 3 volte per ciascuna coppia di masse.**
- Verificare che la forma della semi-sinusoide non sia evidentemente distorta alla compressione massima. Può succedere se la molla viene troppo compressa ed esce dal regime elastico. In questo caso, ridurre le velocità dei carrelli.
- Infine, la stima del periodo e quindi della pulsazione del moto sinusoidale permette di verificare la legge del moto armonico $B = \omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{k/(m_1 + m_2)}$. Possiamo anche ricavare la costante elastica k della molla dal valore di B e fare un confronto con il valore di k misurato precedentemente.

Urti elastici (Video 3)

Porre uno dei carrelli fermo in centro al binario (bersaglio), l'altro vicino al sonar (proiettile), orientati in modo che si respingano all'urto. Caricare con uno dei pesi piccoli a disposizione il carrello proiettile. Dare una piccola spinta al proiettile.

• Il sonar misurerà la velocità del primo carrello prima e dopo l'urto, permettendo di misurarne, nota la massa del carrello, le quantità di moto $m_1 v_1$ e $m_1 {v_1}'$ prima e dopo l'urto dai fit lineari delle velocità, come fatto nel caso dell'urto completamente anelastico (Fig. 3).

• La velocità del secondo carrello non può essere misurata dal sonar, poiché nascosto dal primo carrello. Tuttavia il secondo carrello arriva ad urtare il misuratore di forze. Come nella misura dell'urto anelastico, dal grafico forza-tempo (compressione della molla da parte di una massa e la successiva espansione, quindi un semiperiodo di un moto sinusoidale) si misura l'integrale di questa curva, determinando l'impulso che è pari alla variazione della quantità di moto. Analogamente al caso dell'urto completamente anelastico, possiamo ricavare la quantità di moto del secondo carrello dopo l'urto dall'equazione $p_2' = m_2 v_2' = A/B$.

Anche in questo caso, si potrà verificare quanto la quantità:

$$r = \frac{m_1 v_1}{m_1 {v_1}' + m_2 {v_2}'} \tag{11}$$

si discosta dall'unità (sempre, entro gli errori che vanno stimati).

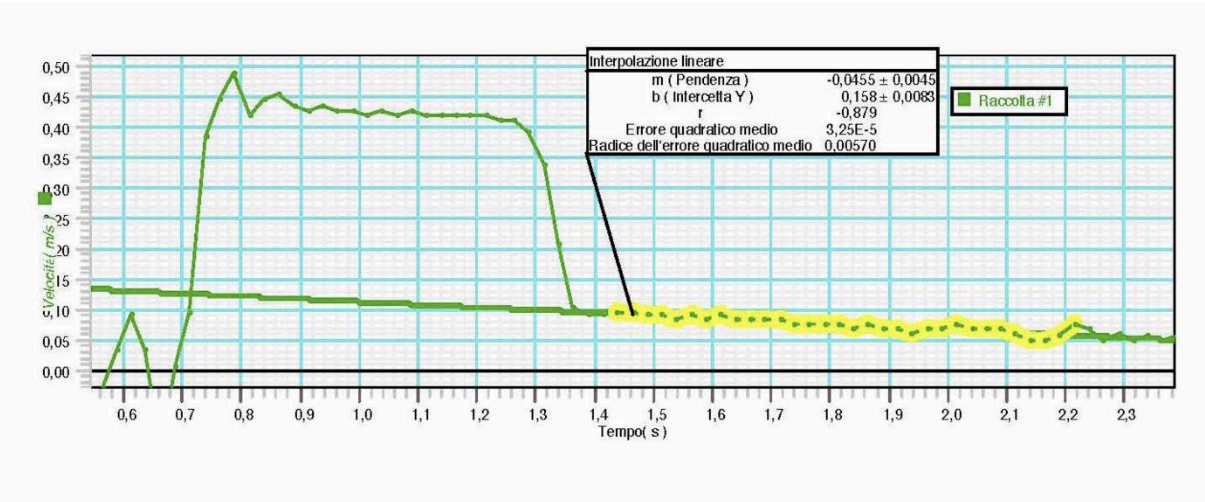

Fig. 3: velocità del proiettile carico prima e dopo l'urto elastico

Attenzione: come visto per gli urti completamente anelastici, la quantità di moto p_2' ottenuta dall'impulso del dinamometro sarà leggermente più piccola rispetto al valore reale a causa della presenza di attrito lungo il tragitto carrello dopo l'urto – molla. Anche in questo caso possiamo migliorare la precisione sulla quantità di moto del bersaglio in due modi: i) posizionando il secondo carrello vicino alla molla così da minimizzare il tragitto carrello – molla e quindi la variazione della quantità di moto dovuta all'attrito; ii) determinando la quantità di moto persa a causa dell'attrito $\Delta p_2{}' = F_{att}\Delta t = m_2 a \Delta t$ dove l'accelerazione a (decelerazione in questo caso) è ottenuta dall'interpolazione lineare del grafico $v_2'(t)$ dopo l'urto e Δt è il tempo tra l'urto e il contatto con il dinamometro. Noto $\Delta p_2{}'$ (preso in valore assoluto), si ricava:

$$p_2{}'_{corretto} = p_2{}' + \Delta p_2{}' \tag{12}$$

dove $p_2{}' = A/B$ viene ricavato dai valori di A e B come descritto sopra.

Infine, per gli studenti volenterosi, si può verificare se l'urto è stato effettivamente elastico determinando quanto dista dall'unità (come sempre entro gli errori da stimare) la quantità:

$$q = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2}$$

Stesura relazione

Nella stesure della relazione:

1) Descrivere l'apparato sperimentale e gli strumenti utilizzati (è possibile aggiungere anche qualche foto);

2) Descrivere l'esperimento e la procedura di misura (è possibile aggiungere qualche screenshot dello schermo che mostra i punti sperimentali e la relativa interpolazione lineare);

3) Riportare tutti i dati sperimentali "grezzi" misurati con il relativo errore (m_1, m_2, v_1, v, etc. e i relativi errori di misura) per tutte le serie di misure (almeno 3 diverse coppie di masse dei carrelli).

4) Riportare l'analisi dei dati sperimentali, calcolare i rapporti r (ed eventualmente q) e stimarne l'errore utilizzando la propagazione dell'errore.

5) Discutere i risultati ottenuti, conclusioni